1 Teorias de Gauge

Quando lidamos com mais de um campo fermiônico de mesma massa, escrevemos a Lagrangiana livre de intereação, em unidades naturais ($c = 1$ e $\hbar = 1$), como:

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

onde ψ corresponde a um multipleto de férmions.

Analisando (1) fica claro que essa Lagrangiana exibe simetria $U(N)$ global, o que equivale a dizer que

$$\psi \longrightarrow U\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}U^\dagger \tag{2}$$

sendo U a matriz unitária $N \times N$ que mantém a (1) invariante. Mas devemos lembrar que toda matriz unitária pode ser escrita como a exponencial de uma matrix Hermitiana:

$$U = e^{iH}, \quad H^\dagger = H \tag{3}$$

e todas as matrizes Hermitianas de dimensão N são combinações lineares de $N^2 - 1$ matrizes t_i e da identidade:

$$H = \theta\mathbb{I} + \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{4}$$

Na linguagem da teoria de grupos dizemos que $U(N) = U(1)\otimes SU(N)$, dessa forma, reescrevendo a (3)

$$U = e^{i\theta}e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\alpha}} \tag{5}$$

percebemos claramente que $\boldsymbol{t}$ são os geradores de $SU(N)$. É evidente que a Lagrangiana fica invariante sob transformações $U(1)$, então cabe a nós estudarmos as transformações $SU(N)$ locais:

$$\psi \longrightarrow e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)}\psi \tag{6}$$

Na QED sabemos que a Lagrangiana é invariante por transformações $U(1)$ locais quando se define uma derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \tag{7}$$

que se utiliza de um campo vetorial (o fóton), cuja transformação é:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{8}$$

sendo e a constante de acoplamento, equivalente ao módulo da carga do elétron.

Ao generalizarmos a situação para simetrias $SU(N)$ locais devemos reescrever (7) e (8) de acordo com a estrutura das transformações. Assim

$$D_\mu = \partial_\mu - igt^aA^a_\mu \tag{9}$$

$$A^a_\mu(x) \longrightarrow A^a_\mu(x) + \tfrac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a(x) \ \ + \ \ ? \tag{10}$$

e queremos encontrar o "?"que garante invariância local. Para isso, notamos que:

$$D_\mu(U\psi) = UD_\mu\psi \tag{11}$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}
D_\mu(U\psi) &= (\partial_\mu - igt^a A'^a_\mu)(U\psi) = \partial_\mu(U\psi) - igt^a A'^a_\mu U\psi \\
&= (\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu\psi - igt^a A'^a_\mu U\psi \\
&= U\partial_\mu\psi - Uigt^a A^a_\mu\psi + Uigt^a A^a_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi - igt^a A'^a_\mu U\psi \\
&= UD_\mu\psi + Uigt^a A^a_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi - igt^a A'^a_\mu U\psi
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
igt^a A'^a_\mu U\psi &= Uigt^a A^a_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi \\
t^a A'^a_\mu U &= Ut^a A^a_\mu - \tfrac{i}{g}(\partial_\mu U) \\
t^a A'^a_\mu &= Ut^a A^a_\mu U^{-1} - \tfrac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Vale lembrar que estamos lidando com grupos de Lie, e cada elemento pertencente ao grupo pode ser obtido variando continuamente o α em (5). A álgebra dos grupos $SU(N)$ é a seguinte:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{13}$$

sendo a *constante de estrutura* f^{abc} totalmente antissimétrica sob permutação de qualquer um dos índices.

Tomando um α infinitesimal é possível fazer algumas aproximações:

$$U \approx 1 + i\alpha^a t^a, \quad U^\dagger \approx 1 - i\alpha^a t^a, \quad \partial_\mu U \approx it^a\partial_\mu\alpha^a \tag{14}$$

promovendo essas substituições em (12)

$$\begin{aligned}
t^a A'^a_\mu &\approx t^a A^a_\mu U t^a A^a_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \\
&\approx t^a A^a_\mu + iA^a_\mu\alpha^b[t^b, t^a] + \frac{t^a}{g}\partial_\mu\alpha^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&\approx t^a A^a_\mu + \frac{t^a}{g}\partial_\mu + t^a f^{abc}A^b_\mu\alpha^c
\end{aligned}$$

então,

$$A^a_\mu \longrightarrow A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu + f^{abc}A^b_\mu\alpha^c \tag{15}$$

é a transformação que mantém a Lagrangiana (1) invariante. Mas esse procedimento gera um vínculo: a derivada covariante introduziu campos vetoriais $\boldsymbol{A_\mu}$ na teoria (os bósons de gauge), portanto deve-se acrescentar à (1) a Lagrangiana livre desses bósons. A Lagrangiana de Proca descreve os campos vetoriais:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{G}_{\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\boldsymbol{A}^\nu\boldsymbol{A}_\nu \tag{16}$$

O termo $\frac{m^2}{2}\boldsymbol{A}^\nu \boldsymbol{A}_\nu$ não é invariante quando A^a_ν se transforma segundo (15), logo os bósons de gauge devem ter massa nula para satisfazer a invariância local. Dizemos, portanto, que a manifestação de campos vetoriais na teoria nos obriga a incluir o termo cinético dos bósons na Lagrangiana inicial.

Na QED, tínhamos que $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. No caso geral,

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{17}$$

ince

Dessa maneira, a Lagrangiana completa da teoria é

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\boldsymbol{G}_{\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} \tag{18}$$