

# 1 Glashow-Weinberg-Salam: a teoria GWS

Vimos na seção [Teorias de Gauge](#) que a lagrangiana completa da teoria de gauge é:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} \quad (1)$$

onde a derivada covariante é definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu - igt^a A_\mu^a \quad (2)$$

e os bósons de gauge se transformam da seguinte maneira:

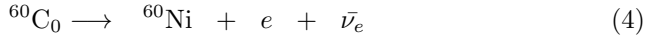
$$A_\mu^a \longrightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu + f^{abc}A_\mu^b\alpha^c \quad (3)$$

Alguns fenômenos, tais como o decaimento beta, não puderam ser adequadamente explicados pelas teorias QED e QCD. De fato, o fenômeno envolvido em muitos decaimentos está agregado a outro tipo de interação: a interação fraca.

Dentre outros aspectos, as interações fracas têm duas características fundamentais:

- violam a paridade
- conservam o número leptônico

Experimentalmente verificou-se que a paridade do decaimento de alguns átomos era totalmente violada. Por exemplo, no processo



onde o cobalto apresentava  $J = 5$ , observou-se que o níquel, quando produzido no repouso, apresentava  $J = 4$ . Pela conservação da paridade haveria dois resultados possíveis para o par elétron/anti-neutrino:  $[e_L^-, \bar{\nu}_{eR}]$  ou  $[e_R^-, \bar{\nu}_{eL}]$ . Porém, 100% das medições apontavam para a primeira ocorrência. Outros experimentos foram feitos utilizando diferentes amostras, e quando havia violação da paridade o resultado era sempre o mesmo: produção de férmions de mão esquerda. Isso sugeria que havia alguma força envolvida cujos propagadores da interação se acoplavam apenas a férmions de mão esquerda.

Esse comportamento motivou a utilização da seguinte notação:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (5)$$

$$\psi_L = \frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi \quad \text{e} \quad \psi_R = \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi \quad (6)$$

onde

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

$P_L$  e  $P_R$  são os projetores idempotentes dos férmions quirais.

Analogamente à eletrodinâmica, cuja corrente definiu-se por  $j_{em}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , podemos definir correntes fermiônicas fracas para léptons de primeira geração da seguinte maneira:

$$j_{(e^-)}^\alpha = \bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_{eL} = \bar{e} \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \nu_e = \bar{e} \gamma^\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \nu_e \quad (8)$$

$$j_\alpha^{(\mu^-)} = \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\alpha \mu_L = \bar{\nu}_\mu \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma_\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \mu^- = \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \mu^- \quad (9)$$

que são as correntes pseudovetoriais no processo  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ .

É natural pensar que todos os decaimentos fracos sejam mediados por interações entre correntes pseudovetoriais com uma constante de acoplamento  $G_F$  universal. Por convenção, escrevemos a amplitude de decaimento como:

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} j_{(1)}^\alpha j_\alpha^{(2)} \quad (10)$$

e medições bastante precisas apontam que:

$$G_F = 1.166\ 378\ 7(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (11)$$

Ao comparar (10) com a amplitude na QED ( $\mathcal{M} = \frac{-e^2}{k^2} j_{em}^\mu j_\mu^{em}$ ) percebemos que  $G_F$  basicamente substitui o fator  $e^2/k^2$ . Isso nos leva a pensar na existência de um propagador carregado intermediando a interação fraca, mas diferentemente dos fótons, esses propagadores devem ser massivos, caso contrário seriam diretamente produzidos em decaimentos fracos. Além disso, a constante de acoplamento  $e$  é adimensional, e queremos uma constante de acoplamento fraca  $g/\sqrt{2}$  que também a seja (o fator  $\sqrt{2}$  é convenção). Assim, reescrevendo (10) em função de  $g/\sqrt{2}$ , da massa do propagador  $M_W$  e do seu quadrimomento  $k$ , teremos:

$$\mathcal{M} = \left( \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu^- \gamma^\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \mu \right) \frac{1}{M_W^2 - k^2} \left( \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \nu_e \right) \quad (12)$$

No limite  $k^2 \ll M_W^2$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (13)$$

o que significa dizer que a baixas energias as correntes fermiônicas interagem praticamente em um ponto, como se não houvesse propagador. Essa é uma clara manifestação do curto alcance das forças fracas a baixas energias; e esse curto alcance ocorre por  $M_W$  ser muito maior que as energias envolvidas no decaimento beta.

Dessa maneira, deveriam existir dois propagadores que diferissem somente no valor da carga elétrica,  $W^+$  e  $W^-$ , e ambos foram confirmados experimentalmente.

Outra maneira de escrever (12) seria:

$$-i\mathcal{M} = \bar{\nu}_\mu^- \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \right) \mu \frac{ig_{\alpha\beta}}{M_W^2 - k^2} \bar{e} \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right) \nu_e \quad (14)$$

onde percebemos claramente que o fator de vértice seria dado por  $\frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5)$ .

Na década de setenta as seguinte reações foram detectada nas câmaras de bolha do CERN:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_\mu + e^- &\longrightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \\ \bar{\nu}_\mu + N &\longrightarrow \bar{\nu}_\mu + X \\ \nu_\mu + N &\longrightarrow \nu_\mu + X \end{aligned}$$

processos que não podem ser descritos por  $W^\pm$ . Precisou-se de um terceiro bóson de gauge,  $Z^0$ , para mediar tais processos neutros. Além disso, existe uma diferença crucial entre os processos carregados e os neutros: não são somente férmions com quiralidade de mão esquerda que se acoplam com o  $Z^0$ , fato verificado experimentalmente.

Portanto, temos dois tipos de interações fracas: neutras e carregadas. Cada uma delas apresenta uma corrente fermiônica associada. Para o par [elétron, neutrino de elétron] as correntes carregadas são:

$$j_\mu \equiv j_\mu^+ = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L = \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e \quad (15)$$

$$j_\mu^\dagger \equiv j_\mu^- = \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L = \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu \quad (16)$$

as correntes dos outros léptons são obtidas pela substituição  $e \longleftrightarrow l$ , onde  $\nu$  passará a representar o neutrino do novo lépton  $l$ .

Pelo fato das correntes carregadas sempre estarem associadas a férmions da mesma família, podemos pensar em dispor tais férmions em dubletos de  $SU(2)_L$ . A princípio existe uma razão muito simples que nos impediria de formar esses dubletos: as massas dos férmions, de modo geral, são muito diferentes. O elétron, por exemplo, tem massa  $M_e = 0.510\,998\,928(11)$  MeV enquanto o  $\nu < 2$  eV. Porém, lembramos aqui que todos os férmions têm suas massas proibidas pela simetria quiral. Na seção [Mecanismo de Higgs](#) veremos de que forma a massa da partícula é “restaurada”.

O dubleto de léptons da família do elétron é:

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (17)$$

A quiralidade de (17) foi assim escolhida porque a simetria dessa interação é  $SU(2)_L$ , ou seja, somente os férmions de mão esquerda se acoplam com os

bósons de gauge dessa teoria:

$$\chi_L \longrightarrow e^{i\alpha^a(x)\sigma^a/2} \chi_L \quad (18)$$

$$\chi_R \longrightarrow \chi_R \quad (19)$$

onde  $\sigma^a$  são as matrizes de Pauli (geradores de  $SU(2)$ ). Novamente temos um caso da teoria de gauge. A Lagrangiana do processo está dada em (1), a derivada covariante tem a forma de (2), com  $t^a = \sigma^a/2$ , e os três bósons de gauge resultantes se transformam segundo (3). Porém, na teoria de gauge os bósons de gauge devem ter massa nula, e já se sabe que  $W$ 's e  $Z$ 's são massivos. Tudo será resolvido por meio do mecanismo de Higgs.

Na QED, a carga elétrica está associada a uma simetria  $U(1)$  local e se acopla igualmente aos férmions quirais, isto é, não viola a paridade:

$$j_\mu^{em} = -\bar{\psi} \gamma_\mu \psi = -\bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L - \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R \quad (20)$$

$$j_\mu^{em} = \bar{\psi} \gamma_\mu Q \psi \quad (21)$$

onde  $Q$  é o operador de carga elétrica, cujos autovalores são iguais às cargas dos férmions envolvidos na corrente.

Definindo,

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

podemos reescrever as correntes carregadas da seguinte forma:

$$j_\mu^+ = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \sigma^+ \chi_L \quad (24)$$

$$j_\mu^- = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \sigma^- \chi_L \quad (25)$$

ou então podemos definir

$$j_\mu^a = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma^a}{2} \chi_L \quad (26)$$

de modo que as correntes carregadas ficam expressas como

$$j_\mu^+ = j_\mu^1 + ij_\mu^2 \quad (27)$$

$$j_\mu^- = j_\mu^1 - ij_\mu^2 \quad (28)$$

e por mais que a ideia de escrever a corrente neutra da interação fraca como

$$j_\mu^3 \equiv \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma_3}{2} \chi_L = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \quad (29)$$

seja atraente, ela está incorreta, pois (29) acopla-se somente a férmions de mão esquerda, quando verifica-se experimentalmente que a corrente fraca neutra  $j_\mu^{NC}$

se acopla com férmions de ambas as quiralidades. Uma maneira de corrigir esse ponto é encontrando uma combinação linear entre  $j_\mu^{em}$  (que não respeita  $SU(2)_L$ ) e  $j_\mu^3$  para criar uma corrente neutra adequada aos resultados experimentais. Esse fato nos dá uma pista de que talvez as interações elétricas e fracas sejam diferentes manifestações de uma mesma interação.

Para isso, o trabalho consistiu em formar duas combinações ortogonais entre  $j_\mu^{em}$  e  $J_\mu^{NC}$  que apresentassem propriedades de transformação por  $SU(2)_L$  bem definidas: uma delas, a  $j_\mu^3$ , completaria o tripleto de correntes, equação (26); a outra combinação seria invariante por  $SU(2)$ , formando um singlete de corrente  $j_\mu^Y$ . Este singlete é chamado de hipercarga; ele tem simetria  $U(1)_Y$  e é definido como:

$$j_\mu^Y = \bar{\psi} \gamma_\mu Y \psi \quad (30)$$

onde  $Y$  é o operador hipercarga, cujos autovalores correspondem às hipercargas dos férmions envolvidos nas correntes:

$$Q = t^3 + Y \quad (31)$$

e portanto

$$j_\mu^{em} = j_\mu^3 + j_\mu^Y \quad (32)$$

de modo que o eletromagnetismo associa-se a uma simetria  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . São quatro os bósons de gauge dessa teoria: 3 de  $SU(2)_L$  e 1 de  $U(1)_Y$ .

$$\begin{aligned} SU(2)_L & : W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3 \\ U(1)_Y & : B_\mu \end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito em (22) e (23) definimos:

$$W^\pm \equiv \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (33)$$

essa notação será útil adiante.

Reescrevendo a Lagrangiana (1)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + gA_\mu^a\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} \quad (34)$$

veremos que o terceiro termo representa a interação férmion-bóson de gauge. Por convenção:

$$\text{interação de } U(1): -iej_\mu^{em} A^\mu \quad (35)$$

Vamos assumir que as correntes eletrofracas se acoplam com seus respectivos bósons de gauge da mesma forma que ocorre em (34), ou seja,  $W_\mu^a$  acopla-se com o tripleto  $j_\mu^a$  por uma constante  $g$ , enquanto  $B_\mu$  acopla-se ao singlete  $j_\mu^Y$  por uma constante  $g'$ .

$$\text{interação de } SU(2)_L \otimes (U1)_Y: -igj_\mu^a(W^a)^\mu - ig'j_\mu^Y B^\mu \quad (36)$$

Para escrever as derivadas covariantes deve-se usar (2) tendo em mente que férmions de quiralidade mão direita são invariantes por transformações  $SU(2)_L$ , então:

$$D_\mu \psi_R = (\partial_\mu - ig' Y B_\mu) \psi_R \quad (37)$$

$$D_\mu \psi_L = (\partial_\mu - ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig' Y B_\mu) \psi_L \quad (38)$$

Para encontrarmos os bósons que se acoplam com a corrente neutra da força fraca e a corrente eletromagnética (respectivamente o bóson  $Z^0$  e o fóton), teremos que mudar da base  $W_\mu^3$  e  $B_\mu$  para  $Z_\mu$  e  $A_\mu$ .

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (39)$$

E  $\theta_w$  é o ângulo de mistura fraca, ou ângulo de Weinberg, que aparece na mudança da base  $(W_\mu^3, B_\mu)$  para  $(Z^0, A_\mu)$ .

A partir de (38) podemos reescrever (35):

$$\begin{aligned} ig j_\mu^a (W^a)^\mu - ig' j_\mu^Y B^\mu = & - i(g \sin \theta_w j_\mu^3 + g' \cos \theta_w j_\mu^Y) A^\mu \\ & - i(g \cos \theta_w j_\mu^3 - g' \sin \theta_w j_\mu^Y) Z^\mu \end{aligned} \quad (40)$$

O primeiro termo de (39) corresponde à interação eletromagnética (34):

$$- i(g \sin \theta_w j_\mu^3 + g' \cos \theta_w j_\mu^Y) A^\mu = -ie j_\mu^{em} A^\mu \quad (41)$$

Recorrendo à (32) concluímos:

$$\boxed{g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e} \quad (42)$$

Explicitamente vemos que as constantes de acoplamento das interações fracas,  $g$  e  $g'$ , e eletromagnética,  $e$ , estão completamente correlacionadas; uma clara manifestação da unificação da QED com as interações fracas.

Promovendo a substituição dos resultados (41) e (32) no segundo termo de (39) chegamos que:

$$- i(g \cos \theta_w j_\mu^3 - g' \sin \theta_w j_\mu^Y) Z^\mu = -i \frac{g}{\cos \theta_w} (j_\mu^3 - \sin^2 \theta_w j_\mu^{em}) Z^\mu \quad (43)$$

e definiu-se:

$$\boxed{j_\mu^{NC} \equiv j_\mu^3 - \sin^2 \theta_w j_\mu^{em}} \quad (44)$$

portanto, encontramos uma combinação da representação  $SU(2)_L \otimes U(1)$  que está associada à corrente neutra fraca.